Allgemeine Untersuchung über die Beziehung von Invarianz zur Erhaltung im gekrümmten Raum für die Theorie klassischer Felder

Von Ernst Schmutzer

Aus dem Theoretisch-Physikalischen Institut der Universität Jena

(Z. Naturforschg. **16 a**, 825—835 [1961]; eingegangen am 13. Februar 1961)

For a curved space the relation between invariance against continuous transformations and conservation is studied for a general classical field theory described by a Lagrangian of second order. From the infinitesimal invariance of the Lagrangian up to a divergence-like term which may be admitted for greater generality many relations are derived which represent a generalized version of the Noether theorem. The formulation is given in such a general manner that it can immediately be applied to all physically significant types of continuous symmetries. Detailed considerations are made about the relation of conservation laws in curved coordinate systems to those in Minkowski coordinates. For fields of a general geometrical type a direct proof is given concerning the identity of the Belinfante energy complex and the symmetrical energy complex. In connexion with this problem the transformation properties of the metrical spintensors for infinitesimal coordinate transformations are derived. The developped formulae are applied to a field system consisting of the electromagnetical field and the nonlinear spinor field of Heisenberg type.

§ 1. Einführung

Das Noether-Theorem hat mit der Entwicklung der Feldtheorie eine zunehmende Bedeutung erlangt [1, 2]. Das zeigt sich auch insbesondere daran, daß sich in letzter Zeit immer mehr Arbeiten diesem Problemkreis widmeten. Wir wollen aus der umfangreichen Liste, ohne auf Vollständigkeit zu achten, nur einige wenige Arbeiten zitieren [3–11]. In unserer Abhandlung legen wir Wert darauf, in dem vorgezeichneten Rahmen möglichst große Allgemeingültigkeit zu erlangen, um alle physikalisch wichtigen Symmetrietypen zu erfassen. Bezüglich der Koordinatentransformation schließen wir uns sehr eng dem Vorgehen von Mizkjewitsch an. Um mit seiner Arbeit leichter vergleichen zu können, wählen wir auch teilweise seine Bezeichnungsweise.

Wir betrachten ein physikalisches Feldsystem, aufgebaut aus verschiedenen Feldarten, die durch folgenden Satz von unabhängigen Feldfunktionen charakterisiert werden mögen:

$$(\chi_A) = (\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m) \rightarrow \chi \quad \text{(zur Abkürzung)}. \quad (1)$$

(Große lateinische Indizes dienen zur Durchnumerierung der Feldfunktionen; ihr doppeltes Auftreten bedeutet Anwendung der Einsteinschen Summenkonvention.) Jede dieser Feldfunktionen hänge im allgemeinen von dem Satz der Koordinaten

$$(x^\alpha) = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \rightarrow x \quad \text{(zur Abkürzung)} \quad (2)$$

ab. (Griechische Indizes beziehen sich auf den Koordinatenraum; ihr doppeltes Auftreten bedeutet Anwendung der Einsteinschen Summenkonvention über den betrachteten Koordinatenraum.) Partielle Ableitungen bezeichnen wir durch ein Komma, Riemannsche kovariante Ableitungen durch ein Semikolon.

Die infinitesimale Koordinatentransformation

$$x^{\alpha'} = x^\alpha + \xi^\alpha \quad (3)$$

zieht folgende infinitesimale Änderung der Feldfunktionen infolge ihres geometrischen Charakters nach sich:

$$\chi_{A'} = \chi_A + \Delta_{\mathrm{K}}\, \chi_A\,. \quad (4)$$

Beide Veränderungen beziehen sich auf einen festen Raumpunkt, der in verschiedenen Koordinatensystemen beschrieben wird. Man nennt deshalb $\Delta_{\mathrm{K}}\, \chi$ „lokale Variation“. Natürlich lassen sich die transformierten Feldfunktionen im festgehaltenen Raumpunkt durch Umschreibung der Argumente als im allgemeinen verschiedene Funktionen der verschiedenen Koordinatensysteme darstellen:

$$\chi_A = \chi_A(x) \rightarrow \chi_{A'} = F_A(x) = F_A(x(x')) = G_A(x')\,. \quad (5)$$

Die Anwendung dieser lokalen Variation auf die

[1] E. Noether, Nachr. d. kgl. Ges. d. Wiss., Göttingen 1918, S. 235.
[2] E. Bessel-Hagen, Math. Ann. **84**, 258 [1921].
[3] L. Rosenfeld, Mém. Acad. Roy. Belg. **18**, 2 [1938].
[4] F. Belinfante, Physica **6**, 887 [1939].
[5] E. L. Hill, Rev. Mod. Phys. **23**, 253 [1951].
[6] P. Roman, Acta Phys. Hung. **5**, 143 [1955].
[7] G. Marx, Acta Phys. Hung. **1**, 209 [1952].
[8] N. Mizkjewitsch, Ann. Phys., Lpz. **1**, 319 [1958].
[9] P. G. Bergmann, Phys. Rev. **112**, 287 [1958].
[10] J. N. Goldberg, Phys. Rev. **111**, 315 [1958].
[11] J. G. Fletcher, Rev. Mod. Phys. **32**, 65 [1960].

Ableitungen der Feldfunktionen liefert

$$\text{a)}\quad \chi_{A',\alpha'} = \chi_{A,\alpha} + \Delta_{\mathrm{K}}\,\chi_{A,\alpha}\,,$$
$$\text{b)}\quad \chi_{A',\alpha',\beta'} = \chi_{A,\alpha,\beta} + \Delta_{\mathrm{K}}\,\chi_{A,\alpha,\beta}\,. \tag{6}$$

Aus (3) ergibt sich nun infinitesimal

$$A^{\mu}_{\alpha'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}} = g^{\mu}_{\alpha} - \xi^{\mu}{}_{,\alpha}\,,$$
$$A^{\mu'}_{\alpha} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}} = g^{\mu}_{\alpha} + \xi^{\mu}{}_{,\alpha} \quad (g^{\mu}_{\alpha} = \delta^{\mu}_{\alpha})\,. \tag{7}$$

Durch Differentiation von (4) entsteht daraus

$$\chi_{A',\alpha'} = \chi_{A,\alpha} - \chi_{A,\mu}\,\xi^{\mu}{}_{,\alpha} + (\Delta_{\mathrm{K}}\,\chi_A)_{,\alpha}\,, \tag{8}$$

also durch Vergleich mit (6)

$$\Delta_{\mathrm{K}}\,\chi_{A,\alpha} = (\Delta_{\mathrm{K}}\,\chi_A)_{,\alpha} - \chi_{A,\mu}\,\xi^{\mu}{}_{,\alpha}\,. \tag{9}$$

Wir stellen fest: Die lokale Variation ist mit der partiellen Differentiation nicht vertauschbar.

Die Kommutativität mit der partiellen Ableitung gewährleistet dagegen die „substantielle Variation", definiert durch

$$\delta\chi_A = \Delta_{\mathrm{K}}\,\chi_A - \chi_{A,\mu}\,\xi^{\mu}\,, \tag{10}$$

bzw. $\delta\chi_{A,\alpha,\beta,\dots} = \Delta_{\mathrm{K}}\,\chi_{A,\alpha,\beta,\dots} - \chi_{A,\alpha,\beta,\dots,\mu}\,\xi^{\mu}\,.$ (11)

Wir beweisen allgemein:

$$(\delta\chi_{A,\alpha,\beta,\dots})_{,\mu} = \delta\chi_{A,\alpha,\beta,\dots,\mu}\,, \tag{12}$$

indem wir (11) differenzieren:

$$(\delta\chi_{A,\alpha,\beta,\dots})_{,\tau} = (\Delta_{\mathrm{K}}\,\chi_{A,\alpha,\beta,\dots})_{,\tau} - \chi_{A,\alpha,\beta,\dots,\mu,\tau}\,\xi^{\mu} - \chi_{A,\alpha,\beta,\dots,\mu}\,\xi^{\mu}{}_{,\tau}$$

und den nach (6) zu bildenden Ausdruck

$$\Delta_{\mathrm{K}}\,\chi_{A,\alpha,\beta,\dots} = \chi_{A',\alpha',\beta',\dots} - \chi_{A,\alpha,\beta,\dots}$$

ebenfalls differenzieren und umformen:

$$(\Delta_{\mathrm{K}}\,\chi_{A,\alpha,\beta,\dots})_{,\tau} = \Delta_{\mathrm{K}}\,\chi_{A,\alpha,\beta,\dots,\tau} + \chi_{A,\alpha,\beta,\dots,\mu}\,\xi^{\mu}{}_{,\tau}\,.$$

Durch Vergleich erhält man dann sofort (12). Eine anschauliche Bedeutung der substantiellen Variation ergibt sich aus der folgenden Gleichung:

$$\delta\chi_A = \Delta_{\mathrm{K}}\,\chi_A - \chi_{A,\mu}\,\xi^{\mu} = \chi_{A'} - \chi_A - (\chi_A(x') - \chi_A(x)) = G_A(x') - \chi_A(x') = G_A(x) - \chi_A(x)\,.$$

Man erkennt leicht, daß die lokale Variation der Leibnizschen Produktregel genügt:

$$\Delta_{\mathrm{K}}(\chi_A\,\Phi_B) = \chi_{A'}\,\Phi_{B'} - \chi_A\,\Phi_B = \chi_{A'}\,\Phi_{B'} - \chi_A\,\Phi_{B'} + \chi_A\,\Phi_{B'} - \chi_A\,\Phi_B = (\Delta_{\mathrm{K}}\,\chi_A)\,\Phi_B + \chi_A(\Delta_{\mathrm{K}}\,\Phi_B)\,. \tag{13}$$

Auf Grund der Definition (10) gilt dann dasselbe auch für die substantielle Variation:

$$\delta(\chi_A\,\Phi_B) = (\delta\chi_A)\,\Phi_B + \chi_A(\delta\Phi_B)\,. \tag{14}$$

Neben den Koordinatentransformationen spielen in der Physik noch weitere Transformationen, wie Eich-, Phasentransformationen usw. eine wichtige Rolle. Die Koordinatentransformationen hatten wir durch den Index „K" gekennzeichnet. Die jetzt zu untersuchenden restlichen Transformationen seien durch den Index „R" symbolisiert. Die Feldfunktionen ändern sich bei solchen Transformationen wie folgt:

$$\chi'_A = \chi_A + \Delta_{\mathrm{R}}\,\chi_A\,, \quad \text{bzw.}$$
$$(\chi'_A)_{,\alpha,\dots} = \chi_{A,\alpha\dots} + (\Delta_{\mathrm{R}}\,\chi_A)_{,\alpha,\dots}\,. \tag{15}$$

Für die Gesamtänderung resultiert dann:

$$\Delta\chi_A = \chi'_{A'} - \chi_A = \chi'_{A'} - \chi_{A'} + \chi_{A'} - \chi_A = \Delta_{\mathrm{R}}\,\chi_A + \Delta_{\mathrm{K}}\,\chi_A\,,$$
$$\Delta\chi_{A,\alpha,\dots} = (\chi'_{A'})_{,\alpha',\dots} - \chi_{A,\alpha,\dots} = (\chi'_{A'})_{,\alpha',\dots} - \chi_{A',\alpha',\dots} + \chi_{A',\alpha',\dots} - \chi_{A,\alpha,\dots} = (\Delta_{\mathrm{R}}\,\chi_A)_{,\alpha,\dots} + \Delta_{\mathrm{K}}\,\chi_{A,\alpha,\dots}\,, \tag{16}$$

so daß sich folgende Zusammenhänge ergeben:

$$\Delta\chi_A = \delta\chi_A + \chi_{A,\mu}\,\xi^{\mu} + \Delta_{\mathrm{R}}\,\chi_A\,,$$
$$\Delta\chi_{A,\alpha} = \delta\chi_{A,\alpha} + \chi_{A,\alpha,\mu}\,\xi^{\mu} + (\Delta_{\mathrm{R}}\,\chi_A)_{,\alpha} \tag{17}$$
$$\Delta\chi_{A,\alpha,\beta} = \delta\chi_{A,\alpha,\beta} + \chi_{A,\alpha,\beta,\mu}\,\xi^{\mu} + (\Delta_{\mathrm{R}}\,\chi_A)_{,\alpha,\beta}\,.$$

§ 2. Verallgemeinerte Fassung des Noether-Theorems

Wir betrachten ein Feldsystem, das durch die bis auf eine Divergenz gegenüber den oben erwähnten Transformationen invariante Lagrange-Dichte Λ beschrieben werden möge:

$$\Lambda(\chi'_{A'}, \chi'_{A',\alpha'}, \chi'_{A',\alpha',\beta'}, x^{\mu'}) = \Lambda(\chi_A, \chi_{A,\alpha}, \chi_{A,\alpha,\beta}, x^{\mu}) - \Omega^{\alpha}{}_{;\alpha}\,. \tag{18}$$

Die Anwendung der Taylor-Entwicklung führt nun wegen der Infinitesimalität der Transformationen sofort zur Beziehung

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\chi_A}\,\Delta\chi_A + \frac{\partial\Lambda}{\partial\chi_{A,\alpha}}\,\Delta\chi_{A,\alpha} + \frac{\partial\Lambda}{\partial\chi_{A,\alpha,\beta}}\,\Delta\chi_{A,\alpha,\beta} + \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x^{\alpha}}\right)_{\mathrm{expl.}}\xi^{\alpha} + \Omega^{\alpha}{}_{;\alpha} = 0\,. \tag{19}$$

Aus später einleuchtenden Gründen schreiben wir diese Gleichung in eine neue Gleichung mit den geometrischen Dichten

$$\mathfrak{L} = \Lambda \sqrt{g} \quad (\text{Lagrange-Funktion}), \quad \mathfrak{O}^\alpha = \Omega^\alpha \sqrt{g} \tag{20}$$

um (dabei sind $g = -|g_{\alpha\beta}|$ und die Metrik reell gewählt):

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi_A} \Delta\chi_A - \mathfrak{L} \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial \chi_A} \Delta\chi_A + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi_{A,\alpha}} \Delta\chi_{A,\alpha} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi_{A,\alpha,\beta}} \Delta\chi_{A,\alpha,\beta} + \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^\alpha}\right)_{\text{expl.}} \xi^\alpha + \mathfrak{O}^\alpha{}_{,\alpha} = 0\,. \tag{21}$$

Bei Verwendung von (17) läßt sich dafür schreiben:

$$\left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi_A} - \mathfrak{L} \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial \chi_A}\right] (\delta\chi_A + \chi_{A,\mu}\,\xi^\mu + \Delta_{\mathrm{R}}\,\chi_A) + \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^\alpha}\right)_{\text{expl.}} \xi^\alpha + \mathfrak{O}^\alpha{}_{,\alpha} \tag{22}$$

$$= -\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi_{A,\alpha}} [\delta\chi_{A,\alpha} + \chi_{A,\alpha,\mu}\,\xi^\mu + (\Delta_{\mathrm{R}}\,\chi_A)_{,\alpha}] - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi_{A,\alpha,\beta}} [\delta\chi_{A,\alpha,\beta} + \chi_{A,\alpha,\beta,\mu}\,\xi^\mu + (\Delta_{\mathrm{R}}\,\chi_A)_{,\alpha,\beta}]$$

oder nach einigen Umformungen:

$$\left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi_A} - \mathfrak{L} \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial \chi_A}\right] \Delta_{\mathrm{R}}\,\chi_A + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi_{A,\alpha}} (\Delta_{\mathrm{R}}\,\chi_A)_{,\alpha} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi_{A,\alpha,\beta}} (\Delta_{\mathrm{R}}\,\chi_A)_{,\alpha,\beta}$$

$$+ \left[\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \chi_A} - \mathfrak{L} \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial \chi_A}\right] \delta\chi_A + \mathfrak{O}^\alpha{}_{,\alpha} + \xi^\mu \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^\mu}\right)_{\text{expl.}} + \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi_A} - \mathfrak{L} \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial \chi_A}\right) \chi_{A,\mu} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi_{A,\alpha}} \chi_{A,\alpha,\mu} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi_{A,\alpha,\beta}} \chi_{A,\alpha,\beta,\mu}\right]$$

$$+ \left[\left\{\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi_{A,\alpha}} - 2\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi_{A,\alpha,\beta}}\right)_{,\beta}\right\} \delta\chi_A + \left\{\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi_{A,\alpha,\beta}} \delta\chi_A\right\}_{,\beta}\right]_{,\alpha} = 0\,. \tag{23}$$

Dabei haben wir zur Abkürzung die Variationsableitung eingeführt

$$\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \chi_A} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi_A} - \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi_{A,\alpha}}\right)_{,\alpha} + \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi_{A,\alpha,\beta}}\right)_{,\alpha,\beta}. \tag{24}$$

Es empfiehlt sich jetzt, in (23) die substantiellen Variationen zugunsten der lokalen zu eliminieren:
Unter Heranziehung von (10) sowie Benutzung der Identität

$$(\mathfrak{L}\,g^\alpha_\mu)_{,\alpha} = \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^\mu}\right)_{\text{expl.}} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi_A} \chi_{A,\mu} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi_{A,\alpha}} \chi_{A,\alpha,\mu} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi_{A,\alpha,\beta}} \chi_{A,\alpha,\beta,\mu} \tag{25}$$

und der Abkürzungen

$$\text{a)}\ \Pi^{A\alpha} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi_{A,\alpha}} - \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi_{A,\alpha,\beta}}\right)_{,\beta}, \qquad \text{b)}\ \Pi^{A\alpha\beta} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi_{A,\alpha,\beta}} \tag{26}$$

resultiert dann

$$\left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi_A} - \mathfrak{L} \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial \chi_A}\right] \Delta_{\mathrm{R}}\,\chi_A + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi_{A,\alpha}} (\Delta_{\mathrm{R}}\,\chi_A)_{,\alpha} + \Pi^{A\alpha\beta} (\Delta_{\mathrm{R}}\,\chi_A)_{,\alpha,\beta} - \mathfrak{L}\,\xi^\alpha{}_{,\alpha} + \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \chi_A} [\Delta_{\mathrm{K}}\,\chi_A - \chi_{A,\mu}\,\xi^\mu]$$

$$- \mathfrak{L} \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial \chi_A} \Delta_{\mathrm{K}}\,\chi_A + [\mathfrak{O}^\alpha + \Pi^{A\alpha} \Delta_{\mathrm{K}}\,\chi_A + \xi^\mu \{\mathfrak{L}\,g^\alpha_\mu - \Pi^{A\alpha} \chi_{A,\mu} - \Pi^{A\alpha\beta} \chi_{A,\beta,\mu}\}$$

$$+ \Pi^{A\alpha\beta} (\Delta_{\mathrm{K}}\,\chi_A)_{,\beta} - \Pi^{A\alpha\beta} \chi_{A,\mu}\,\xi^\mu{}_{,\beta}]_{,\alpha} = 0\,. \tag{27}$$

Man kann diese Gleichung als eine der Feldtheorie angepaßte verallgemeinerte Fassung des Noether-Theorems ansehen.

§ 3. Zerlegung des Feldsystems in metrisches Feld und restliches Feldsystem

Der Satz der Feldfunktionen χ_A bestehe aus dem Satz der metrischen Feldfunktionen $g_{\mu\nu}$ und dem Satz der restlichen Feldfunktionen U_A (große lateinische Indizes beziehen sich jetzt auf die letzteren). Bei Verwendung der Abkürzungen

$$\overset{G}{\Pi}{}^{\mu\nu\alpha} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\nu,\alpha}} - \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\nu,\alpha,\beta}}\right)_{,\beta}, \qquad \overset{G}{\Pi}{}^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\nu,\alpha,\beta}} \tag{28}$$

$$\overset{U}{\Pi}{}^{A\alpha} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi_{A,\alpha}} - \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial U_{A,\alpha,\beta}}\right)_{,\beta}, \qquad \overset{U}{\Pi}{}^{A\alpha\beta} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial U_{A,\alpha,\beta}} \tag{29}$$

schreibt sich dann (27):

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\nu}} - \mathfrak{L}\frac{g_{\mu\nu}}{2}\right]\Delta_{\mathrm{R}}\, g_{\mu\nu} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\nu,\alpha}}\,(\Delta_{\mathrm{R}}\, g_{\mu\nu})_{,\alpha} + \overset{G}{\prod}{}^{\mu\nu\alpha\beta}\,(\Delta_{\mathrm{R}}\, g_{\mu\nu})_{,\alpha,\beta} + \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta g_{\mu\nu}}\,[\Delta_{\mathrm{K}}\, g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu,\tau}\,\xi^\tau] \\
&\quad - \frac{\mathfrak{L}}{2}\, g^{\mu\nu}\,\Delta_{\mathrm{K}}\, g_{\mu\nu} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial U_A}\,\Delta_{\mathrm{R}}\, U_A + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial U_{A,\alpha}}\,(\Delta_{\mathrm{R}}\, U_A)_{,\alpha} + \overset{U}{\prod}{}^{A\alpha\beta}\,(\Delta_{\mathrm{R}}\, U_A)_{,\alpha,\beta} \\
&\quad + \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta U_A}\,[\Delta_{\mathrm{K}}\, U_A - U_{A,\mu}\,\xi^\mu] - \mathfrak{L}\,\xi^\alpha{}_{,\alpha} + \Big[\mathfrak{D}^\alpha + \overset{G}{\prod}{}^{\mu\nu\alpha}\,\Delta_{\mathrm{K}}\, g_{\mu\nu} + \overset{G}{\prod}{}^{\mu\nu\alpha\beta}\,(\Delta_{\mathrm{K}}\, g_{\mu\nu})_{,\beta} \\
&\quad - \overset{G}{\prod}{}^{\mu\nu\alpha\beta}\, g_{\mu\nu,\tau}\,\xi^\tau{}_{,\beta} + \overset{U}{\prod}{}^{A\alpha}\,\Delta_{\mathrm{K}}\, U_A + \overset{U}{\prod}{}^{A\alpha\beta}\,(\Delta_{\mathrm{K}}\, U_A)_{,\beta} - \overset{U}{\prod}{}^{A\alpha\beta}\, U_{A,\tau}\,\xi^\tau{}_{,\beta} \\
&\quad + \xi^\tau\Big\{\mathfrak{L}\, g^\alpha_\tau - \overset{G}{\prod}{}^{\mu\nu\alpha}\, g_{\mu\nu,\tau} - \overset{G}{\prod}{}^{\mu\nu\alpha\beta}\, g_{\mu\nu,\beta,\tau} - \overset{U}{\prod}{}^{A\alpha}\, U_{A,\tau} - \overset{U}{\prod}{}^{A\alpha\beta}\, U_{A,\beta,\tau}\Big\}\Big]_{,\alpha} = 0\,.
\end{aligned} \tag{30}$$

Um bei der Differentiation nach symmetrischen Größen wie etwa $g_{\mu\nu}$ oder $U_{A,\mu,\nu}$ eine doppelte Zählung zu vermeiden, haben wir dabei festgesetzt, daß die Differentiation ohne Rücksicht auf die Symmetrie auszuführen ist.

Aus der Transformationsformel für Tensoren ergibt sich nun mit Hilfe von (7)

$$\Delta_{\mathrm{K}}\, U_\alpha = -U_\mu\,\xi^\mu{}_{,\alpha}, \quad \text{bzw.} \quad \Delta_{\mathrm{K}}\, U_{\alpha\beta\ldots} = -U_{\mu\beta\ldots}\,\xi^\mu{}_{,\alpha} - U_{\alpha\mu\ldots}\,\xi^\mu{}_{,\beta} - \ldots, \tag{31}$$

wenn die U_A speziell Tensoren sind. Die Anwendung auf den metrischen Tensor ergibt

$$\begin{gathered}
\Delta_{\mathrm{K}}\, g_{\alpha\beta} = -g_{\mu\beta}\,\xi^\mu{}_{,\alpha} - g_{\alpha\mu}\,\xi^\mu{}_{,\beta}\,; \qquad \Delta_{\mathrm{K}}\, g = g\, g^{\mu\nu}\,\Delta_{\mathrm{K}}\, g_{\mu\nu} = -2\, g\,\xi^\alpha{}_{,\alpha}\,; \\
\Delta_{\mathrm{K}} \ln\sqrt{g} = -\xi^\alpha{}_{,\alpha}\,; \quad \Delta_{\mathrm{K}}\, g^\alpha_\beta = 0; \quad \Delta_{\mathrm{K}}\, g^{\tau\sigma} = g^{\alpha\tau}\,\xi^\sigma{}_{,\alpha} + g^{\alpha\sigma}\,\xi^\tau{}_{,\alpha}\,.
\end{gathered} \tag{32}$$

Für Feldfunktionen allgemeineren Charakters verallgemeinern wir (31) wie folgt:

$$\Delta_{\mathrm{K}}\, U_A = -U_B\, S_A{}^{B\beta}{}_\alpha\,\xi^\alpha{}_{,\beta}, \tag{33}$$

wobei in den $S_A{}^{B\beta}{}_\alpha$ der geometrische Charakter der Feldgrößen zum Ausdruck kommt. Im Falle eines Tensors 1. Stufe wird

$$S_\sigma{}^{\tau\beta}{}_\alpha = g^\tau_\alpha\, g^\beta_\sigma\,. \tag{34}$$

Formel (30) nimmt damit eine sehr umfangreiche Gestalt an, die sich einfacher schreiben läßt, wenn man folgende Abkürzungen verwendet:

$$\mathfrak{B}_\tau{}^\alpha = \mathfrak{L}\, g^\alpha_\tau - \overset{U}{\prod}{}^{A\alpha}\, U_{A,\tau} - \overset{U}{\prod}{}^{A\alpha\beta}\, U_{A,\beta,\tau} - \overset{G}{\prod}{}^{\mu\nu\alpha}\, g_{\mu\nu,\tau} - \overset{G}{\prod}{}^{\mu\nu\alpha\beta}\, g_{\mu\nu,\tau,\beta} - \mathfrak{J}^A\, S_A{}^{B\alpha}{}_\tau\, U_B - \mathfrak{J}^{\mu\alpha}\, g_{\mu\tau} - \mathfrak{J}^{\alpha\mu}\, g_{\mu\tau}, \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_\tau{}^{\alpha\mu} = &- \overset{U}{\prod}{}^{A\alpha}\, S_A{}^{B\mu}{}_\tau\, U_B - \overset{U}{\prod}{}^{A\alpha\sigma}\, S_A{}^{B\mu}{}_{\tau,\sigma}\, U_B - \overset{U}{\prod}{}^{A\alpha\sigma}\, S_A{}^{B\mu}{}_\tau\, U_{B,\sigma} - \overset{U}{\prod}{}^{A\alpha\mu}\, U_{A,\tau} - \overset{G}{\prod}{}^{\nu\mu\alpha}\, g_{\tau\nu} \\
&- \overset{G}{\prod}{}^{\mu\nu\alpha}\, g_{\tau\nu} - \overset{G}{\prod}{}^{\mu\nu\alpha\sigma}\, g_{\tau\nu,\sigma} - \overset{G}{\prod}{}^{\nu\mu\alpha\sigma}\, g_{\tau\nu,\sigma} - \overset{G}{\prod}{}^{\sigma\nu\alpha\mu}\, g_{\sigma\nu,\tau}\,,
\end{aligned} \tag{36}$$

$$\mathfrak{N}_\tau{}^{\lambda\alpha\gamma} = -\overset{U}{\prod}{}^{A\lambda\gamma}\, S_A{}^{B\alpha}{}_\tau\, U_B - \overset{G}{\prod}{}^{\alpha\nu\lambda\gamma}\, g_{\tau\nu} - \overset{G}{\prod}{}^{\nu\alpha\lambda\gamma}\, g_{\tau\nu}\,, \tag{37}$$

$$\mathfrak{J}^A = \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta U_A}, \qquad \mathfrak{J}^{\mu\nu} = \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta g_{\mu\nu}}\,. \tag{38}$$

Spalten wir außerdem $\mathfrak{D}^\alpha$ noch in zwei Anteile auf:

$$\mathfrak{D}^\alpha = \mathfrak{D}\,\xi^\alpha + \Delta_{\mathrm{R}}\,\mathfrak{D}^\alpha, \tag{39}$$

so ergibt sich aus (30) nach längerer Rechnung:

$$\begin{aligned}
&(\Delta_{\mathrm{R}}\,\mathfrak{D}^\alpha)_{,\alpha} + \left\{\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta g_{\mu\nu}} - \frac{\mathfrak{L}}{2}\, g^{\mu\nu}\right\}\Delta_{\mathrm{R}}\, g_{\mu\nu} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\nu,\alpha}}\,(\Delta_{\mathrm{R}}\, g_{\mu\nu})_{,\alpha} + \overset{G}{\prod}{}^{\mu\nu\alpha\beta}\,(\Delta_{\mathrm{R}}\, g_{\mu\nu})_{,\alpha,\beta} \\
&\quad + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial U_A}\,\Delta_{\mathrm{R}}\, U_A + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial U_{A,\alpha}}\,(\Delta_{\mathrm{R}}\, U_A)_{,\alpha} + \overset{U}{\prod}{}^{A\alpha\beta}\,(\Delta_{\mathrm{R}}\, U_A)_{,\alpha,\beta} + \xi^\tau[\mathfrak{B}_\tau{}^\alpha{}_{,\alpha} + (\mathfrak{J}^A\, S_A{}^{B\alpha}{}_\tau\, U_B \\
&\quad + \mathfrak{J}^{\mu\alpha}\, g_{\mu\tau} + \mathfrak{J}^{\alpha\mu}\, g_{\mu\tau})_{,\alpha} + \mathfrak{D}_{,\tau} - \mathfrak{J}^A\, U_{A,\tau} - \mathfrak{J}^{\mu\nu}\, g_{\mu\nu,\tau}] + \xi^\tau{}_{,\mu}\,\{\mathfrak{B}_\tau{}^\mu + \mathfrak{D}\, g^\mu_\tau + \mathfrak{M}_\tau{}^{\alpha\mu}{}_{,\alpha}\} \\
&\quad + \xi^\tau{}_{,\mu,\alpha}\,\{\mathfrak{M}_\tau{}^{\alpha\mu} + \mathfrak{N}_\tau{}^{\lambda\alpha\mu}{}_{,\lambda}\} + \xi^\tau{}_{\alpha,\beta,\mu}\,\mathfrak{N}_\tau{}^{\alpha\beta\mu} = 0\,.
\end{aligned} \tag{40}$$

Wegen der Unabhängigkeit der ξ^τ und deren Ableitungen sowie der Δ_R-Variationen folgt daraus

$$(\Delta_\mathrm{R}\,\mathfrak{D}^\alpha)_{,\alpha} + \left\{\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\nu}} - \frac{\mathfrak{L}}{2}\,g^{\mu\nu}\right\}\Delta_\mathrm{R}\,g_{\mu\nu} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\nu,\alpha}}\,(\Delta_\mathrm{R}\,g_{\mu\nu})_{,\alpha} + \overset{G}{\prod}{}^{\mu\nu\alpha\beta}\,(\Delta_\mathrm{R}\,g_{\mu\nu})_{,\alpha,\beta} \tag{41}$$

$$+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial U_A}\,\Delta_\mathrm{R}\,U_A + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial U_{A,\alpha}}\,(\Delta_\mathrm{R}\,U_A)_{,\alpha} + \overset{U}{\prod}{}^{A\alpha\beta}\,(\Delta_\mathrm{R}\,U_A)_{,\alpha,\beta} = 0\,,$$

$$\mathfrak{B}_\tau{}^\alpha{}_{,\alpha} = \mathfrak{J}^A\,U_{A,\tau} + \mathfrak{J}^{\mu\nu}\,g_{\mu\nu,\tau} - \mathfrak{D}_{,\tau} - (\mathfrak{J}^A\,S_A{}^{B\alpha}{}_\tau\,U_B + \mathfrak{J}^{\mu\alpha}\,g_{\mu\tau} + \mathfrak{J}^{\alpha\mu}\,g_{\mu\tau})_{,\alpha}\,, \tag{42}$$

$$\mathfrak{B}_\tau{}^\mu = -\,\mathfrak{M}_\tau{}^{\alpha\mu}{}_{,\alpha} - \mathfrak{D}\,g^\mu_\tau\,,\quad \mathfrak{M}_\tau{}^{(\alpha\mu)} + \mathfrak{N}_\tau{}^{\lambda(\alpha\mu)}{}_{,\lambda} = 0\,,\quad \mathfrak{N}_\tau{}^{(\alpha\beta\mu)} = 0\,. \tag{43, 44, 45}$$

Die runden Klammern um die Indizes sind dabei die BACHschen Klammern, die die Summe über die Permutationen bezüglich der eingeklammerten Indizes bedeuten, dividiert durch die Fakultät der Indexzahl

$$\mathfrak{M}_\tau{}^{(\alpha\mu)} = \frac{1}{2!}\,(\mathfrak{M}_\tau{}^{\alpha\mu} + \mathfrak{M}_\tau{}^{\mu\alpha}) \quad \text{usw.} \tag{46}$$

Gl. (42) läßt sich auch durch direktes Nachrechnen bestätigen [8], wenn die LAGRANGE-Dichte nicht explizit von den Koordinaten abhängt und $\mathfrak{D}$ null ist. In unserem allgemeineren Fall folgt dagegen durch Differentiation von (35) und Vergleich mit (42) die Bedingungsgleichung

$$(\partial\mathfrak{L}/\partial x^\tau)_{\text{expl.}} = -\,\mathfrak{D}_{,\tau}\,. \tag{47}$$

Durch Differentiation von (43) und Vergleich mit den aus (44) und (45) resultierenden Formeln

$$\mathfrak{N}_\tau{}^{\alpha\beta\mu}{}_{,\alpha,\beta,\mu} = 0\,, \tag{48}$$

$$\mathfrak{M}_\tau{}^{\alpha\mu}{}_{,\alpha,\mu} = 0 \tag{49}$$

ergibt sich dann:

$$\mathfrak{B}_\tau{}^\mu{}_{,\mu} = -\,\mathfrak{D}_{,\tau} = (\partial\mathfrak{L}/\partial x^\tau)_{\text{expl.}}\,, \tag{50}$$

bzw.
$$(\mathfrak{J}^A\,S_A{}^{B\alpha}{}_\tau\,U_B + \mathfrak{J}^{\mu\alpha}\,g_{\mu\tau} + \mathfrak{J}^{\alpha\mu}\,g_{\mu\tau})_{,\alpha} = \mathfrak{J}^A\,U_{A,\tau} + \mathfrak{J}^{\mu\nu}\,g_{\mu\nu,\tau}\,. \tag{51}$$

Bei MIZKJEWITSCH findet man, daß man die Formeln (48) und (49) in eine zu (50) analoge Form bringen kann, wenn man die folgenden Ausdrücke einführt:

$$\mathfrak{R}_\tau{}^{\beta\alpha} = \mathfrak{B}_\tau{}^\beta\,x^\alpha + \mathfrak{M}_\tau{}^{\beta\alpha}\,, \tag{52}$$

$$\mathfrak{K}_\tau{}^{\beta\alpha\lambda} = \mathfrak{B}_\tau{}^\beta\,x^\alpha\,x^\lambda + \mathfrak{M}_\tau{}^{\beta\alpha}\,x^\lambda + \mathfrak{M}_\tau{}^{\beta\lambda}\,x^\alpha + \mathfrak{N}_\tau{}^{\beta\alpha\lambda} + \mathfrak{N}_\tau{}^{\beta\lambda\alpha}. \tag{53}$$

Es folgt dann nämlich:

$$\mathfrak{R}_\tau{}^{\beta\alpha}{}_{,\beta} = -\,(\mathfrak{D}\,g^\alpha_\tau + \mathfrak{D}_{,\tau}\,x^\alpha)\,, \tag{54}$$

und
$$\mathfrak{K}_\tau{}^{\beta\alpha\lambda}{}_{,\beta} = -\,(\mathfrak{D}_{,\tau}\,x^\alpha\,x^\lambda + \mathfrak{D}\,g^\alpha_\tau\,x^\lambda + \mathfrak{D}\,g^\lambda_\tau\,x^\alpha)\,. \tag{55}$$

[12] T. S. CHANG, Proc. Camb. Phil. Soc. **44**, 76 [1948].

Die Gln (50), (54) und (55) haben nun äußerlich bereits die Form von differentiellen Erhaltungssätzen. Wäre man von LAGRANGE-Funktionen noch höherer Ordnung ausgegangen, so hätten sich noch mehr derartige Erhaltungssätze für Momente noch höherer Ordnung ergeben [7]. Mit solchen Fragen befaßt sich auch eine Arbeit von CHANG [12]. Während die Formeln (50), (54) und (55) für $\mathfrak{D}=0$ sog. „starke" Erhaltungssätze zum Ausdruck bringen, da das Verschwinden der divergenzartigen Ausdrücke alleinige Folge der Symmetrie der LAGRANGE-Funktion ist, hat (51) die Struktur eines „schwachen" Erhaltungssatzes, da das Verschwinden des divergenzartigen Ausdrucks erst eine Folge der Erfüllung der LAGRANGE-Gleichungen ($\mathfrak{J}^A=0$, $\mathfrak{J}^{\mu\nu}=0$) ist. Wir gehen darauf später noch einmal ein. Schließlich erwähnen wir noch, daß die Größen $\mathfrak{M}_\tau{}^{\beta\alpha}$ „Superpotentiale" heißen, da sich bei invarianten LAGRANGE-Dichten nach (43) durch Differentiation die Größen $\mathfrak{B}_\tau{}^\beta$ gewinnen lassen, die mit dem Energie-Impuls-Komplex eng verbunden sind.

§ 4. Anwendung auf die Newtonsche Punktmechanik

In der NEWTONschen Punktmechanik entsprechen unsere Feldfunktionen den Lagekoordinaten und unsere Koordinatenparameter der Zeit:

$$U_A \to \mathfrak{r}_A\,,\qquad x^\mu \to t\,. \tag{56}$$

Mit diesen Korrespondenzen läßt sich die NEWTONsche Mechanik nach dem eben entwickelten feldtheoretischen Schema behandeln: Die LAGRANGE-Funktion für ein System mit nur inneren Kräften,

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}\sum m_A\,\dot{\mathfrak{r}}_A^2 - V(|\,\mathfrak{r}_A - \mathfrak{r}_B\,|)\,, \tag{57}$$

besitzt bekanntlich gewisse Symmetrieeigenschaften bezüglich der Transformation

$$\mathfrak{r}'_A = \mathfrak{r}_A + \mathfrak{v}\,t + \mathfrak{d}\times\mathfrak{r}_A + \mathfrak{a}\,,\quad t' = t + \xi \tag{58}$$

($\mathfrak{v}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{a}$, ξ infinitesimale Konstanten). Die Ausführung dieser Transformation liefert

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{r}'_A, d\mathfrak{r}'_A/dt') = \mathfrak{L}(\mathfrak{r}_A, d\mathfrak{r}_A/dt) + \sum m_A \dot{\mathfrak{r}}_A \mathfrak{v}. \tag{59}$$

Durch Vergleich mit (18) finden wir

$$\mathfrak{D}^\alpha \to -\sum m_A \mathfrak{r}_A \mathfrak{v},$$
$$\Delta_R \mathfrak{D}^\alpha \to -\sum m_A \mathfrak{r}_A \mathfrak{v}, \quad \mathfrak{D} \to 0. \tag{60}$$

Wir erkennen daran, daß sich im Falle der Transformation für die gleichförmige Bewegung (Schwerpunktsatz) die Einführung des Divergenzgliedes als notwendig erweist [2]. Die allgemeine Beziehung (40) nimmt jetzt wegen der vorausgesetzten Gültigkeit der LAGRANGE-Gleichungen ($\mathfrak{J}^A = 0$) die Gestalt an:

$$\sum \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{r}_A} \Delta_R \mathfrak{r}_A + \sum \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\mathfrak{r}}_A} (\Delta_R \mathfrak{r}_A)^{\cdot} + (\Delta_R \mathfrak{D})^{\cdot} + \xi \dot{\mathfrak{B}} = 0. \tag{61}$$

Dabei ist

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{L} - \sum \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\mathfrak{r}}_A} \dot{\mathfrak{r}}_A = \mathfrak{L} - \sum m_A \dot{\mathfrak{r}}_A^2 = -(T+V) = -E. \tag{62}$$

Setzt man nun in (61) die aus (58) folgenden Relationen

$$\Delta_R \mathfrak{r}_A = \mathfrak{v}\, t + \mathfrak{d} \times \mathfrak{r}_A + \mathfrak{a}, \quad (\Delta_R \mathfrak{r}_A)^{\cdot} = \mathfrak{v} + \mathfrak{d} \times \dot{\mathfrak{r}}_A \tag{63}$$

ein, so ergibt sich wegen der Unabhängigkeit der Transformationsparameter:

$$\dot{E} = 0 \tag{64}$$

(Energiesatz aus der Zeittranslation),

$$(\sum m_A \dot{\mathfrak{r}}_A)^{\cdot} = 0 \tag{65}$$

(Impulssatz aus der Lagetranslation),

$$(\sum m_A \mathfrak{r}_A \times \dot{\mathfrak{r}}_A)^{\cdot} = 0 \tag{66}$$

(Drehimpulssatz aus der räumlichen Drehung),

$$(\sum m_A \dot{\mathfrak{r}}_A t - \sum m_A \mathfrak{r}_A)^{\cdot} = 0 \tag{67}$$

(Schwerpunktsatz aus der gleichförmigen Bewegung).

Wir haben hier dieses bekannte Ergebnis deshalb kurz angeführt, um zu zeigen, wie das obige allgemeine Schema in diesem einfachen Fall funktioniert. Analog läßt sich auch die relativistische Mechanik eines Massenpunktes behandeln.

§ 5. Energie-Komplex und Drehimpuls-Komplex des nichtmetrischen Feldanteils in krummlinigen Koordinaten

Das schwierige Problem des Energie-Komplexes und Drehimpuls-Komplexes des metrischen Feldes soll im Rahmen unserer allgemeinen Darlegungen in einer folgenden Arbeit behandelt werden. Indessen ist es interessant zu studieren, wie sich diese Problemstellung für den nichtmetrischen Feldanteil mit der LAGRANGE-Dichte

$$\Lambda = {}^u\Lambda(U_A, U_{A,\alpha}, U_{A,\alpha,\beta}, g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,\alpha}) \tag{68}$$

(griechische Indizes laufen jetzt von 1 – 4) im Falle eines abgeschlossenen Systems in krummlinigen Koordinaten untersuchen läßt *.

Daß in (68) die ersten Ableitungen des metrischen Tensors auftreten können, erklärt sich daraus, daß zur kovarianten Formulierung des Spinorfeldes die CHRISTOFFEL-Symbole erforderlich sind. Setzen wir als Feldgleichung die LAGRANGE-Gleichung

$$^u\mathfrak{J}^A = \frac{\delta\, {}^u\mathfrak{L}}{\delta U_A} = \frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial U_A} - \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial U_{A,\alpha}}\right)_{,\alpha} + \left(\frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial U_{A,\alpha,\beta}}\right)_{,\alpha,\beta} = 0 \tag{69}$$

voraus, so entsteht aus (35), (36) und (37):

$$^u\mathfrak{B}_\tau{}^\alpha = {}^u\mathfrak{L}\, g^\alpha_\tau - \left\{\frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial U_{A,\alpha}} - \left(\frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial U_{A,\alpha,\beta}}\right)_{,\beta}\right\} U_{A,\tau} - \frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial U_{A,\alpha,\beta}} U_{A,\beta,\tau} - \frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\nu,\alpha}} g_{\mu\nu,\tau} - g_{\mu\tau}\left(\frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\alpha}} + \frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha\mu}}\right) + g_{\mu\tau}\left(\frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha\mu,\sigma}} + \frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\alpha,\sigma}}\right)_{,\sigma}, \tag{70}$$

$$^u\mathfrak{M}_\tau{}^{\alpha\mu} = -\left\{\frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial U_{A,\alpha}} - \left(\frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial U_{A,\alpha,\beta}}\right)_{,\beta}\right\} S_A{}^{B\mu}{}_\tau U_B - \frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial U_{A,\alpha,\sigma}} S_A{}^{B\mu}{}_{\tau,\sigma} U_B - \frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial U_{A,\alpha,\sigma}} S_A{}^{B\mu}{}_\tau U_{B,\sigma} - \frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial U_{A,\alpha,\mu}} U_{A,\tau} - \left(\frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial g_{\nu\mu,\alpha}} + \frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\nu,\alpha}}\right) g_{\tau\nu}, \tag{71}$$

$$^u\mathfrak{N}_\tau{}^{\lambda\alpha\gamma} = -\frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial U_{A,\lambda,\gamma}} S_A{}^{B\alpha}{}_\tau U_B. \tag{72}$$

* Aus satztechnischen Gründen wurde in dieser Arbeit der Buchstabe U an den Stellen, an denen er als vorgesetzter hochgestellter Index auftritt, durch den Buchstaben u ersetzt.

Als Dichte des „kanonischen Energie-Komplexes" wird

$$\overset{\text{can}}{{}^u\mathfrak{T}}{}_\tau{}^\alpha = \left\{\frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial U_{A,\alpha}} - \left(\frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial U_{A,\alpha,\beta}}\right)_{,\beta}\right\} U_{A,\tau} + \frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial U_{A,\alpha,\beta}}\, U_{A,\beta,\tau} + \frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\nu,\alpha}}\, g_{\mu\nu,\tau} - {}^u\mathfrak{L}\, g^\alpha_\tau \tag{73}$$

und als Dichte des „symmetrischen Energie-Komplexes" wird

$$\overset{\text{sym}}{{}^u\mathfrak{T}}{}_\tau{}^\alpha = - g_{\mu\tau}\left(\frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha\mu}} + \frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\alpha}}\right) + g_{\mu\tau}\left(\frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha\mu,\sigma}} + \frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\alpha,\sigma}}\right)_{,\sigma} = - g_{\mu\tau}\left({}^u\mathfrak{J}^{\alpha\mu} + {}^u\mathfrak{J}^{\mu\alpha}\right) \tag{74}$$

definiert. Dann ergibt sich aus (70) der Zusammenhang

$$\overset{\text{sym}}{{}^u\mathfrak{T}}{}_\tau{}^\alpha = \overset{\text{can}}{{}^u\mathfrak{T}}{}_\tau{}^\alpha + {}^u\mathfrak{B}_\tau{}^\alpha . \tag{75}$$

Der kanonische Anteil wird also durch ${}^u\mathfrak{B}_\tau{}^\alpha$ symmetrisiert (Belinfantesches Symmetrisierungsverfahren). Wegen (43) und (49) gilt dann

$$\overset{\text{sym}}{{}^u\mathfrak{T}}{}_\tau{}^\alpha{}_{,\alpha} = \overset{\text{can}}{{}^u\mathfrak{T}}{}_\tau{}^\alpha{}_{,\alpha} . \tag{76}$$

Die Formel (51) geht jetzt über in

$$\overset{\text{sym}}{{}^u\mathfrak{T}}{}_\tau{}^\alpha{}_{,\alpha} = \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu,\tau}\, \overset{\text{sym}}{{}^u\mathfrak{T}}{}^{\mu\nu} \tag{77}$$

oder in anderer Schreibweise mit $\overset{\text{sym}}{{}^uT}{}_\tau{}^\alpha = \frac{1}{\sqrt{g}}\, \overset{\text{sym}}{{}^u\mathfrak{T}}{}_\tau{}^\alpha$

$$\overset{\text{sym}}{{}^uT}{}_\tau{}^\alpha{}_{;\alpha} = 0 . \tag{78}$$

Die Formel (77) ist sehr lehrreich, da sie zeigt, daß bereits im flachen Raum bei Verwendung krummliniger Koordinaten die Energiedefinition problematisch wird.

Ähnlich sieht es mit dem Drehimpuls-Komplex in beliebigen Koordinaten aus. Wir studieren diese Problematik, indem wir von (54) ausgehen. Es entsteht

$${}^u\mathfrak{R}_\tau{}^{\beta\alpha}{}_{,\beta} = 0 , \tag{79}$$

wobei $${}^u\mathfrak{R}_\tau{}^{\beta\alpha} = \left(\overset{\text{sym}}{{}^u\mathfrak{T}}{}_\tau{}^\beta - \overset{\text{can}}{{}^u\mathfrak{T}}{}_\tau{}^\beta\right) x^\alpha + {}^u\mathfrak{M}_\tau{}^{\beta\alpha} \tag{80}$$

ist. Für eine Lagrange-Funktion 1. Ordnung mit vektoriellem Feld folgt:

$${}^u\mathfrak{R}_\tau{}^{\beta\alpha} = \left(\overset{\text{sym}}{{}^u\mathfrak{T}}{}_\tau{}^\beta - \frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial U_{\sigma,\beta}}\, U_{\sigma,\tau} - \frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\nu,\beta}}\, g_{\mu\nu,\tau} + {}^u\mathfrak{L}\, g^\beta_\tau\right) x^\alpha - \frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial U_{\alpha,\beta}}\, U_\tau - g_{\tau\nu}\left(\frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial g_{\nu\alpha,\beta}} + \frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha\nu,\beta}}\right) . \tag{81}$$

Speziell für das elektromagnetische Feld mit ${}^u\mathfrak{L} = -\frac{\sqrt{g}}{4}\, H_{\mu\nu} H^{\mu\nu}$, wobei $H_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$ (A_μ Viererpotential) ist, resultiert

$${}^u\mathfrak{R}_\tau{}^{\beta\alpha} = A_{\tau,\sigma}\, H^{\beta\sigma}\, x^\alpha - H^{\alpha\beta} A_\tau , \tag{82}$$

ein merkwürdiger Ausdruck, dessen Divergenz im Sinne von (79) verschwindet, wie man auch durch direktes Nachrechnen zeigen kann. Aus physikalischen Gründen ist es zweckmäßig, Formel (79) in der Form

$${}^u\mathfrak{R}^{\tau\beta\alpha}{}_{,\beta} = {}^u\mathfrak{R}_\sigma{}^{\beta\alpha}\, g^{\sigma\tau}{}_{,\beta} \tag{83}$$

zu schreiben, aus der durch Antisymmetrisierung in τ und α bei Verwendung der aus (77) folgenden Beziehung

$$\overset{\text{sym}}{{}^u\mathfrak{T}}{}^{\sigma\alpha}{}_{,\alpha} = \tfrac{1}{2}\, \overset{\text{sym}}{{}^u\mathfrak{T}}{}^{\mu\nu}\, g_{\mu\nu,\tau}\, g^{\tau\sigma} + \overset{\text{sym}}{{}^u\mathfrak{T}}{}_\tau{}^\alpha\, g^{\tau\sigma}{}_{,\alpha} \tag{84}$$

entsteht

$$\begin{aligned}\left(\overset{\text{can}}{{}^u\mathfrak{T}}{}^{\alpha\beta} x^\tau - \overset{\text{can}}{{}^u\mathfrak{T}}{}^{\tau\beta} x^\alpha + {}^u\mathfrak{M}^{\tau\beta\alpha} - {}^u\mathfrak{M}^{\alpha\beta\tau}\right)_{,\beta} &= \overset{\text{can}}{{}^u\mathfrak{T}}{}_\sigma{}^\beta \left(x^\tau g^{\sigma\alpha}{}_{,\beta} - x^\alpha g^{\sigma\tau}{}_{,\beta}\right) - \tfrac{1}{2}\, \overset{\text{sym}}{{}^u\mathfrak{T}}{}^{\mu\nu} \left(g_{\mu\nu,\sigma}\, x^\alpha g^{\sigma\tau}\right. \\ &\quad \left. - g_{\mu\nu,\sigma}\, x^\tau g^{\sigma\alpha}\right) + {}^u\mathfrak{M}_\sigma{}^{\beta\alpha}\, g^{\sigma\tau}{}_{,\beta} - {}^u\mathfrak{M}_\sigma{}^{\beta\tau}\, g^{\sigma\alpha}{}_{,\beta}\end{aligned} \tag{85}$$

eine Formel, die an den Drehimpulssatz erinnert. Außerdem kann man (85) noch die folgende Gestalt geben:

$$\left(\overset{\text{sym}}{{}^u\mathfrak{T}}{}^{\alpha\beta} x^\tau - \overset{\text{sym}}{{}^u\mathfrak{T}}{}^{\tau\beta} x^\alpha\right)_{,\beta} = \left[x^\alpha \left\{ {\tau \atop \mu\nu} \right\} - x^\tau \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\}\right] \overset{\text{sym}}{{}^u\mathfrak{T}}{}^{\mu\nu} . \tag{86}$$

Beziehen wir unsere weiteren Betrachtungen dieses Abschnitts auf den Minkowski-Raum mit Minkowski-Koordinaten $(x, y, z, i c t)$, dann schreiben sich die entscheidenden Beziehungen (76), (77), (79), (85) und (86):

$$\overset{\text{can}}{{}^u\mathfrak{T}}{}_{\tau\alpha,\alpha} = 0 , \quad \overset{\text{sym}}{{}^u\mathfrak{T}}{}_{\tau\alpha,\alpha} = 0 , \quad {}^u\mathfrak{R}_{\tau\beta\alpha,\beta} = 0 , \tag{87 – 89}$$

$$\left(\overset{\text{can}}{{}^u\mathfrak{T}}{}_{\alpha\beta}\, x_\tau - \overset{\text{can}}{{}^u\mathfrak{T}}{}_{\tau\beta}\, x_\alpha + {}^u\mathfrak{M}_{\tau\beta\alpha} - {}^u\mathfrak{M}_{\alpha\beta\tau}\right)_{,\beta} = 0 , \tag{90}$$

$$\left(\overset{\text{sym}}{{}^u\mathfrak{T}}{}_{\alpha\beta}\, x_\tau - \overset{\text{sym}}{{}^u\mathfrak{T}}{}_{\tau\beta}\, x_\alpha\right)_{,\beta} = 0 . \tag{91}$$

Fragt man nach der Lokalisierung von Energie, Impuls, Drehimpuls usw., so steht man vor der Auswahl aus diesen Relationen. Diese Auswahl wird eindeutig, wenn man für das elektromagnetische Feld die Eichinvarianz als Auswahlprinzip postuliert, also (88) und (91) als die physikalischen Erhaltungssätze – verallgemeinernd auch für andere Felder – ansieht.

Hätten wir gleich vom Anfang an in Minkowski-Koordinaten gerechnet, so hätten sich wegen $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ die Rechnungen bedeutend vereinfacht:

Ist die LAGRANGE-Funktion translations- und LORENTZ-invariant, d. h. invariant gegen die infinitesimale Transformation

$$\xi_\sigma = \alpha_\sigma + \beta_{\sigma\tau} x_\tau \qquad (\beta_{\sigma\tau} = -\beta_{\tau\sigma}), \tag{92}$$

so entsteht aus (40) wegen (74)

$$\alpha_\sigma \left({}^u\mathfrak{V}_{\sigma\alpha} - {}^u\overset{\text{sym}}{\mathfrak{T}}_{\sigma\alpha}\right)_{,\alpha} + \beta_{\sigma\tau}\left[x_\tau\left({}^u\mathfrak{V}_{\sigma\alpha} - {}^u\overset{\text{sym}}{\mathfrak{T}}_{\sigma\alpha}\right)_{,\alpha} + {}^u\mathfrak{V}_{\sigma\tau} + {}^u\mathfrak{M}_{\sigma\alpha\tau,\alpha}\right] = 0 \tag{93}$$

und daraus mit Hilfe von (75) wegen der Unabhängigkeit der Transformationsparameter:

$${}^u\overset{\text{can}}{\mathfrak{T}}_{\sigma\alpha,\alpha} = \left({}^u\overset{\text{sym}}{\mathfrak{T}}_{\sigma\alpha} - {}^u\mathfrak{V}_{\sigma\alpha}\right)_{,\alpha} = 0 \tag{94}$$

und
$$x_\sigma\, {}^u\overset{\text{can}}{\mathfrak{T}}_{\tau\alpha,\alpha} - x_\tau\, {}^u\overset{\text{can}}{\mathfrak{T}}_{\sigma\alpha,\alpha} + {}^u\mathfrak{V}_{\sigma\tau} - {}^u\mathfrak{V}_{\tau\sigma} + {}^u\mathfrak{M}_{\sigma\alpha\tau,\alpha} - {}^u\mathfrak{M}_{\tau\alpha\sigma,\alpha} = 0\,, \tag{95}$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\left[x_\tau\, {}^u\overset{\text{can}}{\mathfrak{T}}_{\sigma\alpha} - x_\sigma\, {}^u\overset{\text{can}}{\mathfrak{T}}_{\tau\alpha} + {}^u\mathfrak{M}_{\tau\alpha\sigma} - {}^u\mathfrak{M}_{\sigma\alpha\tau}\right]_{,\alpha} = 0 \tag{96}$$

[vgl. (90)]. In dieser Behandlungsweise bleibt einem die oben durchgeführte Prozedur der Antisymmetrisierung erspart. Die weiteren wichtigen Beziehungen

$${}^u\mathfrak{V}_{\sigma\alpha,\alpha} = 0 \quad \text{bzw.} \quad {}^u\overset{\text{sym}}{\mathfrak{T}}_{\sigma\alpha,\alpha} = 0 \tag{97}$$

und damit auch (91) ergeben sich ebenfalls aus (40), wenn man diese Formel so benutzt, daß man die vorgegebene LAGRANGE-Funktion als nur von den nichtmetrischen Feldfunktionen abhängig ansieht.

§ 6. Zur Identität des symmetrischen Energie-Komplexes mit dem Belinfanteschen Energie-Komplex

Die Identität des gravitierend wirkenden symmetrischen und des BELINFANTEschen Energie-Tensors kann nach MARX [7] sehr elegant für Felder beliebigen geometrischen Charakters nachgewiesen werden. Leider ist nicht, wie angegeben, diese Methode für beliebige LAGRANGE-Funktionen anwendbar, sondern wie es scheint nur für LAGRANGE-Funktionen 1. Ordnung, denn die dort verwendete Beziehung

$${}^u\mathfrak{M}_\tau{}^{\mu\alpha} = -\,{}^u\mathfrak{M}_\tau{}^{\alpha\mu} \tag{98}$$

gilt nur in diesem Fall, wie man aus (37) und (44) sofort erkennt. Wir skizzieren diese Methode kurz: Aus (36) resultiert wegen (29)

$${}^u\mathfrak{M}_\tau{}^{\alpha\mu} = -\frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial U_{A,\alpha}}\, S_A{}^{B\mu}{}_\tau U_B - g_{\tau\nu}\left(\frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\nu,\alpha}} + \frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial g_{\nu\mu,\alpha}}\right). \tag{99}$$

Mit der neuen Abkürzung

$$\mathcal{H}^{\lambda\tau\alpha} = \frac{\partial\, {}^u\mathfrak{L}}{\partial U_{A,\lambda}}\, S_A{}^{B\tau\alpha} U_B \tag{100}$$

ergibt sich durch Antisymmetrisierung daraus

$${}^u\mathfrak{M}^{\sigma\alpha\mu} - {}^u\mathfrak{M}^{\mu\alpha\sigma} = \mathcal{H}^{\alpha\sigma\mu} - \mathcal{H}^{\alpha\mu\sigma}. \tag{101}$$

Dadurch wurden die Ableitungen nach den ersten Ableitungen des metrischen Tensors beseitigt, für deren Bildung man den geometrischen Charakter der Feldfunktionen kennen muß.

Durch Indexvertauschung entsteht aus (101)

$${}^u\mathfrak{M}^{\alpha\sigma\mu} - {}^u\mathfrak{M}^{\mu\sigma\alpha} = \mathcal{H}^{\sigma\alpha\mu} - \mathcal{H}^{\sigma\mu\alpha}, \qquad {}^u\mathfrak{M}^{\alpha\mu\sigma} - {}^u\mathfrak{M}^{\sigma\mu\alpha} = \mathcal{H}^{\mu\alpha\sigma} - \mathcal{H}^{\mu\sigma\alpha}. \tag{102}$$

Addiert man die drei Gln. (101) und (102) und beachtet (98), so ergibt sich sofort das BELINFANTEsche Ergebnis

$${}^u\overset{\text{sym}}{\mathfrak{T}}_\tau{}^\alpha = {}^u\overset{\text{can}}{\mathfrak{T}}_\tau{}^\alpha + \tfrac{1}{2}\left(\mathcal{H}^\alpha{}_\tau{}^\mu + \mathcal{H}_\tau{}^{\alpha\mu} + \mathcal{H}^{\mu\alpha}{}_\tau - \mathcal{H}^{\alpha\mu}{}_\tau - \mathcal{H}_\tau{}^{\mu\alpha} - \mathcal{H}^\mu{}_\tau{}^\alpha\right)_{,\mu}. \tag{103}$$

ROSENFELD hat bekanntlich diese Beziehung explizit für Tensor- und Spinorfelder abgeleitet. Wir entwickeln jetzt ein summarisches Verfahren, welches schnell zum Ziele führt und bei welchem die eben erwähnten Fälle als Spezialfälle erscheinen: Der Einfachheit halber beschränken wir uns auch auf LAGRANGE-Funktionen 1. Ordnung:

$$\mathfrak{L} = {}^u\mathfrak{L}(U_A, U_{A,\alpha}, g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,\alpha}) = {}^u\bar{\mathfrak{L}}(U_A, U_{A;\alpha}, g_{\mu\nu}). \tag{104}$$

Die kovarianten Ableitungen der Feldgrößen seien

$$U_{A;\alpha} = U_{A,\alpha} - \left[{}^{\;B}_{A\,\alpha}\right] U_B\,, \tag{105}$$

wobei die Übertragungskoeffizienten $[{}_A{}^B{}_\alpha]$ folgendermaßen mit den CHRISTOFFEL-Symbolen $\{{}_\varrho{}^\lambda{}_\alpha\}$ zusammenhängen mögen:

$$\left[{}^{\;B}_{A\,\alpha}\right] = \left\{{}^{\;\lambda}_{\varrho\,\alpha}\right\} \sum\nolimits_A{}^{B\varrho}{}_\lambda + \text{Glieder ohne } g_{\mu\nu,\lambda} \tag{106}$$

Mit Hilfe von

$$\frac{\partial [{}^{B}_{A\alpha}]}{\partial g_{\sigma\mu,\beta}} = \sum_A{}^{B\varrho}{}_\lambda \frac{\partial \{{}^{\lambda}_{\varrho\alpha}\}}{\partial g_{\sigma\mu,\beta}} = \tfrac{1}{2}\left(\sum_A{}^{B\sigma\mu} g^\beta_\alpha + \sum_A{}^{B\beta\mu} g^\sigma_\alpha - \sum_A{}^{B\sigma\beta} g^\mu_\alpha\right) \tag{107}$$

resultiert

$$\frac{\partial u\mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha\mu,\lambda}} = -\frac{U_B}{2}\left(\frac{\partial u\mathfrak{L}}{\partial U_{C,\lambda}}\sum_C{}^{B\mu\alpha} + \frac{\partial u\mathfrak{L}}{\partial U_{C,\alpha}}\sum_C{}^{B\lambda\mu} - \frac{\partial u\mathfrak{L}}{\partial U_{C,\mu}}\sum_C{}^{B\alpha\lambda}\right), \tag{108}$$

also ist nach (36)

$$\begin{aligned} {}^u\mathfrak{M}_\tau{}^{\lambda\alpha} = -\frac{\partial u\mathfrak{L}}{\partial U_{A,\lambda}} S_A{}^{B\alpha}{}_\tau U_B + \frac{U_B}{2} g_{\tau\mu}\Big[&\frac{\partial u\mathfrak{L}}{\partial U_{C,\lambda}}\sum_C{}^{B\mu\alpha} + \frac{\partial u\mathfrak{L}}{\partial U_{C,\lambda}}\sum_C{}^{B\alpha\mu} + \frac{\partial u\mathfrak{L}}{\partial U_{C,\alpha}}\sum_C{}^{B\lambda\mu} \\ &+ \frac{\partial u\mathfrak{L}}{\partial U_{C,\mu}}\sum_C{}^{B\lambda\alpha} - \frac{\partial u\mathfrak{L}}{\partial U_{C,\mu}}\sum_C{}^{B\alpha\lambda} - \frac{\partial u\mathfrak{L}}{\partial U_{C,\alpha}}\sum_C{}^{B\mu\lambda}\Big]. \end{aligned} \tag{109}$$

Die Antimetrisierungsbedingung (98) schreibt sich dann

$$\frac{\partial u\mathfrak{L}}{\partial U_{A,\lambda}}[S_A{}^{B\alpha}{}_\tau - \sum_A{}^{B\alpha}{}_\tau] + \frac{\partial u\mathfrak{L}}{\partial U_{A,\alpha}}[S_A{}^{B\lambda}{}_\tau - \sum_A{}^{B\lambda}{}_\tau] = 0, \tag{110}$$

woraus durch Koeffizientenvergleich folgt

$$S_A{}^{B\alpha}{}_\tau = \sum_A{}^{B\alpha}{}_\tau. \tag{111}$$

Mit Hilfe von (100) resultiert dann

$${}^u\mathfrak{M}_\tau{}^{\lambda\alpha} = \tfrac{1}{2}[\mathcal{H}^\lambda{}_\tau{}^\alpha + \mathcal{H}^{\alpha\lambda}{}_\tau + \mathcal{H}_\tau{}^{\lambda\alpha} - \mathcal{H}^{\lambda\alpha}{}_\tau - \mathcal{H}_\tau{}^{\alpha\lambda} - \mathcal{H}^\alpha{}_\tau{}^\lambda], \tag{112}$$

also auch das Ergebnis (103).

Im Spezialfall von Spinoren ist (vgl. eine kürzlich erschienene Arbeit [13])

$$[{}^{D}_{A\lambda}] = \tfrac{1}{4}\{{}^{\mu}_{\varrho\lambda}\}\,\sigma_{\mu\dot{B}A}\,\sigma^{\varrho\dot{B}D} - \tfrac{1}{4}\sigma^{\varrho\dot{B}D}\sigma_{\varrho\dot{B}A,\lambda} + \frac{i}{2}\gamma_A{}^D(\Pi_\lambda + i\,\Gamma_{,\lambda}). \tag{113}$$

Durch Vergleich von (106) mit (113) entsteht wegen (111)

$$S_A{}^{D\varrho}{}_\lambda = \tfrac{1}{4}\sigma_{\lambda\dot{B}A}\,\sigma^{\varrho\dot{B}D}, \tag{114}$$

eine für beliebige infinitesimale Koordinatentransformationen von Spinoren wichtige Formel, aus der man sofort abliest

$$S_{AD\varrho\lambda} = -S_{DA\lambda\varrho}. \tag{115}$$

Aus der Transformationsformel für Spinoren in beliebigen Koordinaten [13]

$$U_{A'} = \Lambda^B_{A'}\,U_B \tag{116}$$

resultiert dann sofort wegen (33) für infinitesimale Transformationen

$$\Lambda^B_{A'} = \gamma_A{}^B - \tfrac{1}{4}\sigma_{\alpha\dot{C}A}\,\sigma^{\beta\dot{C}B}\,\xi^\alpha{}_{,\beta} \tag{117}$$

und $$\Lambda^{D'}_B = \gamma_B{}^D + \tfrac{1}{4}\sigma_{\alpha\dot{C}B}\,\sigma^{\beta\dot{C}D}\,\xi^\alpha{}_{,\beta}. \tag{118}$$

Setzt man dieses Ergebnis sowie (7) in die Transformationsformel für Spintensoren

$$\sigma^{\mu'\dot{C}'D'}\,A^{\mu'}_\alpha\,\Lambda^{\dot{C}'}_{\dot{E}}\,\Lambda^{D'}_F\,\sigma^{\alpha\dot{E}F} \tag{119}$$

ein, so ergibt sich

$$\sigma^{\mu'\dot{C}'D'} = \sigma^{\mu\dot{C}D} + \sigma^{\alpha\dot{C}D}\,\xi^\mu{}_{,\alpha} + \tfrac{1}{4}\xi^\varrho{}_{,\beta}\,(\sigma_{\varrho\dot{H}F}\,\sigma^{\beta\dot{H}D}\,\sigma^{\mu\dot{C}F} + \sigma_{\varrho\dot{H}F}\,\sigma^{\beta\dot{C}F}\,\sigma^{\mu\dot{H}D}).$$

Die früher [13] abgeleitete Formel

$$\sigma^{\beta\dot{H}D}\,\sigma_{\varrho\dot{H}F}\,\sigma^{\mu\dot{C}F} = g^{\beta\mu}\,\sigma_\varrho{}^{\dot{C}D} - g^\mu_\varrho\,\sigma^{\beta\dot{C}D} - g^\beta_\varrho\,\sigma^{\mu\dot{C}D} \pm i\,\varepsilon^\beta{}_\varrho{}^\mu{}_\varkappa\,\sigma^{\varkappa\dot{C}D} \tag{120}$$

läßt daraus entstehen

$$\sigma^{\mu'\dot{C}'D'} = \sigma^{\mu\dot{C}D} + \tfrac{1}{2}\sigma^{\alpha\dot{C}D}\,\xi^\mu{}_{,\alpha} + \tfrac{1}{2}\sigma_\alpha{}^{\dot{C}D}\,g^{\beta\mu}\,\xi^\alpha{}_{,\beta} - \tfrac{1}{2}\sigma^{\mu\dot{C}D}\,\xi^\varrho{}_{,\varrho}. \tag{121}$$

Im Spezialfall der inhomogenen LORENTZ-Drehung folgt daraus wegen $\xi^\alpha{}_{,\gamma} = \beta_{\alpha\gamma} = -\beta_{\gamma\alpha}$:

$$\sigma^{\mu'\dot{C}'D'} = \sigma^{\mu\dot{C}D}, \tag{122}$$

wie zu erwarten war.

[13] E. SCHMUTZER, Z. Naturforschg. **15 a**, 355 [1960].

§ 7. Anwendung auf das Feldsystem, bestehend aus elektromagnetischem Feld und nichtlinearem Spinorfeld

Da wir uns die Freiheit krummliniger Koordinaten lassen wollen, arbeiten wir im allgemeinen Spinorkalkül [13]. Das nichtlineare Spinorfeld, beschrieben durch die beiden Spinoren ψ_A und $\chi^{\dot A}$, sei vom HEISENBERGschen Typ [14], so daß wir für die LAGRANGE-Funktion des Feldsystems schreiben können:

$$\mathfrak{L} = \frac{\sqrt{g}\,\hbar\, c}{i}\,[\psi_{\dot A}\, \sigma^{\mu \dot A B}\, \psi_{B;\mu} - \psi_A\, \sigma^{\mu A \dot B}\, \psi_{\dot B;\mu} + \chi^A\, \sigma^{\mu}{}_{A\dot B}\, \chi^{\dot B}{}_{;\mu} - \chi^{\dot A}\, \sigma^{\mu}{}_{\dot A B}\, \chi^{B}{}_{;\mu} + i\, N\,(\psi_A, \psi_{\dot A}, \chi^{\dot A}, \chi^A)] - \frac{\sqrt{g}}{4} H_{\mu\nu} H^{\mu\nu}. \tag{123}$$

Man beachte, daß die allgemein-kovariante Formulierung der LAGRANGE-Dichte automatisch die Mitberücksichtigung der Wechselwirkung des Spinorfeldes mit dem elektromagnetischen Feld in eichinvarianter Form impliziert. Bei Verwendung der Ausdrücke für die kovarianten Spinorableitungen [13]

$$\psi_{B;\mu} = \psi_{B,\mu} - \frac{i\,e}{\hbar\, c} A_\mu \psi_B - \psi_D \left\{ {D \atop B\mu} \right\} + \tfrac{1}{2} \psi_B \Gamma_{,\mu}, \qquad \chi^B{}_{;\mu} = \chi^B{}_{,\mu} + \frac{i\,e}{\hbar\, c} A_\mu \chi^B + \chi^D \left\{ {B \atop D\mu} \right\} - \tfrac{1}{2} \chi^B \Gamma_{,\mu} \tag{124}$$

ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \psi_{\dot A}} &= \frac{\sqrt{g}\,\hbar\, c}{i} \left[\sigma^{\mu \dot A B} \psi_{B;\mu} - \frac{i\,e}{\hbar\, c} \psi_C\, \sigma^{\mu C \dot A} A_\mu + \psi_C\, \sigma^{\mu C \dot B} \left\{ {\dot A \atop \dot B \mu} \right\} - \tfrac{1}{2} \psi_C\, \sigma^{\mu C \dot A}\, \Gamma_{,\mu} + i \frac{\partial N}{\partial \psi_{\dot A}} \right], \\
\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \psi_{\dot A, \mu}} &= - \frac{\sqrt{g}\,\hbar\, c}{i} \psi_C\, \sigma^{\mu C \dot A}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi^{\dot A}{}_{,\mu}} = \frac{\sqrt{g}\,\hbar\, c}{i} \chi^C\, \sigma^{\mu}{}_{C \dot A}, \\
\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi^{\dot A}} &= \frac{\sqrt{g}\,\hbar\, c}{i} \left[- \sigma^{\mu}{}_{\dot A B}\, \chi^B{}_{;\mu} - \frac{i\,e}{\hbar\, c} \chi^C\, \sigma^{\mu}{}_{C \dot A}\, A_\mu + \chi^C\, \sigma^{\mu}{}_{C \dot B} \left\{ {\dot B \atop \dot A \mu} \right\} - \tfrac{1}{2} \chi^C\, \sigma^{\mu}{}_{C \dot A}\, \Gamma_{,\mu} + i \frac{\partial N}{\partial \chi^{\dot A}} \right], \\
\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial A_\mu} &= - 2\, e \sqrt{g}\, (\sigma^{\mu \dot A B}\, \psi_{\dot A}\, \psi_B + \sigma^{\mu}{}_{\dot A B}\, \chi^{\dot A}\, \chi^B) = \frac{j^\mu \sqrt{g}}{c}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial A_{\mu,\nu}} = \sqrt{g}\, H^{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{125}$$

so daß nach (69) die folgenden Feldgleichungen resultieren:

$$\sigma^{\mu \dot A B}\, \psi_{B;\mu} + \frac{i}{2} \frac{\partial N}{\partial \psi_{\dot A}} = 0, \qquad \sigma^{\mu}{}_{\dot A B}\, \chi^B{}_{;\mu} - \frac{i}{2} \frac{\partial N}{\partial \chi^{\dot A}} = 0, \qquad H^{\mu\nu}{}_{;\nu} = j^\mu / c. \tag{126}$$

Mit ihrer Hilfe kann man der LAGRANGE-Funktion (123) für die tatsächliche Bewegung eine interessante Gestalt geben:

$$\mathfrak{L}^{act} = - \frac{\sqrt{g}\,\hbar\, c}{2} \left[\frac{\partial N}{\partial \psi_{\dot A}} \psi_{\dot A} + \frac{\partial N}{\partial \psi_A} \psi_A + \frac{\partial N}{\partial \chi^{\dot A}} \chi^{\dot A} + \frac{\partial N}{\partial \chi^A} \chi^A - 2\, N \right] - \frac{\sqrt{g}}{4} H_{\mu\nu} H^{\mu\nu}. \tag{127}$$

Energie-Tensor

Der symmetrische Energie-Tensor errechnet sich nach (103). Der Einfachheit halber beziehen wir die folgenden Berechnungen auf MINKOWSKI-Koordinaten. Der Ausdruck (100) nimmt dann wegen (34) und (114) die Gestalt an:

$$\mathcal{H}^{\lambda\tau\alpha} = \tfrac{1}{4} \left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \psi_{A,\lambda}} \sigma^{\alpha}{}_{\dot C A}\, \sigma^{\tau \dot C B}\, \psi_B + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \psi_{\dot A,\lambda}} \sigma^{\alpha}{}_{C \dot A}\, \sigma^{\tau C \dot B}\, \psi_{\dot B} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi^{\dot A}{}_{,\lambda}} \sigma^{\alpha C \dot A}\, \sigma^{\tau}{}_{C \dot B}\, \chi^{\dot B} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi^{A}{}_{,\lambda}} \sigma^{\alpha \dot C A}\, \sigma^{\tau}{}_{\dot C B}\, \chi^B \right] + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial A_{\tau,\lambda}} A^\alpha. \tag{128}$$

Setzt man nun die Ergebnisse (125) ein, so findet man nach (112) bei Benutzung von (120):

$$\mathcal{H}_{\lambda\tau\alpha} = \pm \frac{\hbar\, c}{2} \varepsilon_{\tau\alpha\lambda\varkappa} [\sigma_{\varkappa}{}^{\dot D B}\, \psi_{\dot D}\, \psi_B - \sigma_{\varkappa \dot D B}\, \chi^{\dot D}\, \chi^B] + H_{\tau\lambda} A_\alpha = - \mathcal{H}_{\tau\lambda\alpha}. \tag{129}$$

Damit entsteht dann nach (112)

$$\mathfrak{M}_{\tau\lambda\alpha} = \mathcal{H}_{\alpha\lambda\tau}. \tag{130}$$

Aus (103) resultiert damit bei Benutzung von (73)

$$\overset{\text{sym}}{\mathfrak{T}}_{\tau\alpha} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \psi_{A,\alpha}} \psi_{A,\tau} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \psi_{\dot A,\alpha}} \psi_{\dot A,\tau} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi^{A}{}_{,\alpha}} \chi^{A}{}_{,\tau} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi^{\dot A}{}_{,\alpha}} \chi^{\dot A}{}_{,\tau} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial A_{\varrho,\alpha}} A_{\varrho,\tau} - \mathfrak{L}\, \delta_{\tau\alpha} + \mathcal{H}_{\mu\alpha\tau,\mu}. \tag{131}$$

[14] H.-P. DÜRR, W. HEISENBERG, H. MITTER, S. SCHLIEDER u. K. YAMAZAKI, Z. Naturforschg. **14 a**, 441 [1959].

Mit Hilfe von (125) und (129) folgt daraus

$$\overset{\text{sym}}{\mathfrak{T}}_{\tau\alpha} = \frac{\hbar c}{i} [\psi_{\dot C} \sigma_\alpha{}^{\dot C A} \psi_{A;\tau} - \psi_C \sigma_\alpha{}^{C\dot A} \psi_{\dot A;\tau} + \chi^C \sigma_{\alpha C\dot A} \chi^{\dot A}{}_{;\tau} - \chi^{\dot C} \sigma_{\alpha \dot C A} \chi^A{}_{;\tau}] \tag{132}$$
$$\pm \frac{\hbar c}{2} \varepsilon_{\alpha\tau\mu\varkappa} [\sigma_\varkappa{}^{\dot D B} \psi_{\dot D} \psi_B - \sigma_{\varkappa \dot D B} \chi^{\dot D} \chi^B]_{,\mu} + H_{\tau\varrho} H_{\varrho\alpha} - \delta_{\tau\alpha} \mathfrak{L}^{act}.$$

Durch Symmetrisierung ergibt sich daraus das gesuchte Resultat:

$$\overset{\text{sym}}{\mathfrak{T}}_{\tau\alpha} = \frac{\hbar c}{2i} [\psi_{\dot C} \{\sigma_\alpha{}^{\dot C A} \psi_{A;\tau} + \sigma_\tau{}^{\dot C A} \psi_{A;\alpha}\} - \psi_C \{\sigma_\alpha{}^{C\dot A} \psi_{\dot A;\tau} + \sigma_\tau{}^{C\dot A} \psi_{\dot A;\alpha}\} + \chi^C \{\sigma_{\alpha C\dot A} \chi^{\dot A}{}_{;\tau} + \sigma_{\tau C\dot A} \chi^{\dot A}{}_{;\alpha}\}$$
$$- \chi^{\dot C} \{\sigma_{\alpha\dot C A} \chi^A{}_{;\tau} + \sigma_{\tau\dot C A} \chi^A{}_{;\alpha}\}] + H_{\tau\varrho} H_{\varrho\alpha} - \delta_{\tau\alpha} \mathfrak{L}^{act}. \tag{133}$$

Außerdem resultiert durch Vergleich von (132) und (133) die Beziehung

$$\pm i\, \varepsilon_{\alpha\tau\mu\varkappa} [\sigma_\varkappa{}^{\dot D B} \psi_{\dot D} \psi_B - \sigma_{\varkappa\dot D B} \chi^{\dot D} \chi^B]_{,\mu} = \psi_{\dot C} \{\sigma_\tau{}^{\dot C A} \psi_{A;\alpha} - \sigma_\alpha{}^{\dot C A} \psi_{A;\tau}\} \tag{134}$$
$$- \psi_C \{\sigma_\tau{}^{C\dot A} \psi_{\dot A;\alpha} - \sigma_\alpha{}^{C\dot A} \psi_{\dot A;\tau}\} + \chi^C \{\sigma_{\tau C\dot A} \chi^{\dot A}{}_{;\alpha} - \sigma_{\alpha C\dot A} \chi^{\dot A}{}_{;\tau}\} - \chi^{\dot C} \{\sigma_{\tau\dot C A} \chi^A{}_{;\alpha} - \sigma_{\alpha\dot C A} \chi^A{}_{;\tau}\}.$$

Im Spinorformalismus ist es möglich, die Spinorfeldgleichungen nach den Ableitungen der Feldfunktionen teilweise aufzulösen. Man erhält so z. B.

$$\psi_{A;\alpha} = \pm \frac{i}{2} \varepsilon^\mu{}_{\alpha\varrho\lambda} \sigma^{\varrho\dot D B} \sigma^\lambda{}_{\dot D A} \psi_{B;\mu} + \frac{i}{2} \frac{\partial N}{\partial \psi_{\dot D}} \sigma_{\alpha\dot D A},$$
$$\chi^A{}_{;\alpha} = \pm \frac{i}{2} \varepsilon_\alpha{}^\mu{}_{\varrho\lambda} \sigma^{\varrho\dot D A} \sigma^\lambda{}_{\dot D B} \chi^B{}_{;\mu} - \frac{i}{2} \frac{\partial N}{\partial \chi^{\dot D}} \sigma_\alpha{}^{\dot D A}. \tag{134 a}$$

Nach einer längeren Rechnung folgt aus (134)

$$(\sigma_\tau{}^{\dot C A} \sigma_{\alpha\dot D A} - \sigma_\alpha{}^{\dot C A} \sigma_{\tau\dot D A}) \left[\frac{\partial N}{\partial \psi_{\dot D}} \psi_{\dot C} - \frac{\partial N}{\partial \chi^{\dot C}} \chi^{\dot D}\right]$$
$$+ (\sigma_\tau{}^{C\dot A} \sigma_{\alpha D\dot A} - \sigma_\alpha{}^{C\dot A} \sigma_{\tau D\dot A}) \cdot \left[\frac{\partial N}{\partial \psi_D} \psi_C - \frac{\partial N}{\partial \chi^C} \chi^D\right] = 0. \tag{134 b}$$

Eichinvarianz

Wir begnügen uns mit der Untersuchung der Eich-Phasen-Invarianz im Rahmen der vorliegenden Theorie. Wie sich im Spinorformalismus die Touschek-Transformation behandeln läßt, soll in einer späteren Arbeit ausführlich dargestellt werden. Um die gewünschten Konsequenzen aus der Eich-Transformation zu ziehen, brauchen wir nur in (41) einzusetzen: Bei Beachtung der folgenden Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \psi'_A &= \psi_A e^{i\Phi}, & \Delta_R \psi_A &= i\Phi \psi_A, \\ \chi'^A &= \chi^A e^{-i\Phi}, & \Delta_R \chi^A &= -i\Phi \chi^A, \\ A'_\mu &= A_\mu + \frac{\hbar c}{e} \Phi_{,\mu}, & \Delta_R A_\mu &= \frac{\hbar c}{e} \Phi_{,\mu}, \end{aligned} \tag{135}$$

wobei Φ reell ist, resultiert aus (41) bei Verwendung von (125) die Beziehung

$$\left[H^{\alpha\mu} \Phi_{,\mu} + \frac{1}{c} j^\alpha \Phi\right]_{,\alpha} = (H^{\alpha\mu}{}_{,\alpha} + j^\mu) \Phi_{,\mu} + H^{\alpha\mu} \Phi_{,\mu,\alpha} + \frac{1}{c} j^\alpha{}_{,\alpha} \Phi = 0, \tag{136}$$

aus der man sofort den Erhaltungssatz der elektrischen Ladung in Form der Kontinuitätsgleichung

$$j^\alpha{}_{,\alpha} = 0 \tag{137}$$

abliest. Daraus ergibt sich weiterhin bei Verwendung der Feldgleichungen (126):

$$\frac{\partial N}{\partial \psi_B} \psi_B - \frac{\partial N}{\partial \psi_{\dot A}} \psi_{\dot A} + \frac{\partial N}{\partial \chi^{\dot A}} \chi^{\dot A} - \frac{\partial N}{\partial \chi^B} \chi^B = 0, \tag{138}$$

eine Bedingung, die die Größe N zu erfüllen hat. Im Falle der Dirac-Theorie ist

$$N = -\frac{2 m_0 c}{\hbar} (\psi_{\dot A} \chi^{\dot A} + \psi_A \chi^A). \tag{139}$$

Gl. (134 b) und (138) sind tatsächlich befriedigt. Wegen der Identität

$$\bar\psi \gamma_\mu \gamma_5 \psi = 2i [\psi_{\dot A} \psi_B \sigma_\mu{}^{\dot A B} - \chi^{\dot A} \chi^B \sigma_{\mu\dot A B}]$$

resultiert für die Heisenbergsche Theorie

$$N = \mp \frac{l_0^2}{2} (\bar\psi \gamma_\mu \gamma_5 \psi)^2 = \pm 2 l_0^2 (\psi_{\dot A} \psi_B \sigma_\mu{}^{\dot A B} - \chi^{\dot A} \chi^B \sigma_{\mu\dot A B})^2. \tag{140}$$

Auch in diesem Fall sind die Gln. (134 b) und (138) erfüllt.